

Methodische Hinweise

Produktintegration

Nachdem aus dem Regelunterricht die Produktregel für die Ableitung zweier multiplikativ verknüpfter Funktionen bekannt ist, kann dies als Ansatz für die Herleitung einer Regel zur Integration eines derartigen Produktes dienen:

$$\begin{array}{ll} \text{Produktregel für } (f(x) \cdot g(x))': & (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ F \text{ statt } f, f' \text{ statt } f': & (F(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \end{array}$$

Dies kann je nach Lerngruppe als Vorgabe ausreichen, um die Schülerinnen und Schüler selbstständig durch Einsetzen und Umformen die Regel für die Produktintegration entdecken zu lassen:

$$\text{Integration: } \int (F(x) \cdot g(x))' dx = \int f(x) \cdot g(x) dx + \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

$$F(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx + \int F(x) \cdot g'(x) dx \quad | - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\boxed{\int f(x) \cdot g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx}$$

Die ermittelte Regel bietet an dieser Stelle Anlass zur Diskussion:

Welche Bedingung muss vorliegen, damit diese Regel anwendbar ist und somit die partielle Integration sinnvoll durchgeführt werden kann?

Die Lerngruppe sollte erkennen, dass dies nur möglich ist, wenn von $F(x) \cdot g'(x)$ eine Stammfunktion angegeben werden kann. Diese Schlussfolgerung kann dazu dienen, sich geschickte bzw. notwendige Herangehensweisen für partielle Integrationen zu überlegen und diese idealerweise direkt im Anschluss an von der Lehrkraft bereitgestellten Übungsaufgaben selbstständig zu überprüfen.

Ein denkbare Beispiel für den Beleg geschickter Herangehensweise ist das Vorgehen bei der Bestimmung des Integrals von

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx,$$

anhand dessen die notwendige Wahl von $f(x)$ und $g(x)$ und das damit verbundene Gelingen oder Scheitern der Integration gezeigt werden kann.

Als weiterführende Aufgabe kann eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion bestimmt werden, evtl. mit dem Hinweis, die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ als Produkt aufzufassen.

Substitution

Auch wenn im neuen Bildungsplan das Verfahren der Kettenregel beim Differenzieren weiterhin enthalten ist und daher hinlänglich bekannt sein sollte, ist davon auszugehen, dass die Praxis der Integration durch Substitution trotz gewisser Entsprechungen für die Lerngruppe ein ungewöhnliches, bisher unbekanntes mathematisches Werkzeug darstellt. Daher ist es ratsam, sich diesem Integrationsverfahren schrittweise anzunähern.

Zunächst empfiehlt es sich an vorgewählten Aufgabenbeispielen, bei denen lediglich das zu berechnende Integral betrachtet wird, aufzuzeigen, bei welchen Fällen die Substitution überhaupt zur Anwendung gelangt (abweichende Fälle wie beispielsweise die lineare Substitution können am Ende thematisiert werden). Dabei soll klar werden, dass ein Zusammenhang zwischen den auftretenden Termen besteht: Es ist darauf zu achten, ob im Integranden ein Term vorkommt, dessen Ableitung (evtl. bis auf einen konstanten Faktor) ebenfalls vorhanden ist.

Anschließend können die bereits verwendeten Aufgabenbeispiele zur Darstellung des Verfahrens genutzt werden. Hierbei sollte die Beispielauswahl sowohl die Bestimmung einer Stammfunktion als auch die vollständige Integration mithilfe der Substitution beinhalten. Angemessene, selbst zu bearbeitende Aufgaben vervollständigen schließlich das Verständnis.

Zum Abschluss lassen sich noch Spezialfälle thematisieren, die vom gängigen Verfahren abweichen. Dazu zählen beispielsweise etwas simplere Berechnungen wie die lineare Substitution, aber auch anspruchsvollere wie die Integration durch die Substitution der Integrationsvariablen, die insbesondere bei trigonometrischen Funktionen ihre Anwendung findet.

Bogenlänge

Während die ersten beiden Unterthemen der Vertiefung der Integralrechnung eher die fachliche, rechnerische Natur in den Vordergrund stellen, bietet sich bei den beiden verbleibenden Themen eine eher praktische, anwendungsorientiertere Fokussierung an. Anhand einer realitätsnahen Einstiegsaufgabe lässt sich das Problem der Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve thematisieren. Dabei erscheint es sinnvoll, zunächst auf ein verhältnismäßig einfaches, kurzes Kurvenstück einzugehen. Denkbar wäre hier die Berechnung des Ausschnitts einer Parabel, der anwendungsorientiert beispielsweise die Länge einer Hängebrücke darstellt.

Am Anfang kann hierbei den Schülerinnen und Schülern Raum für eigene Ideen zur Bestimmung der Länge eingeräumt werden. Falls es zu keinen weiterführenden Vorschlägen kommt, kann zunächst der Hinweis auf die Einteilung der Kurve in mehrere Abschnitte, die durch festgelegte Punkte bzw. Stellen definiert werden, erfolgen. Die Bestimmung der Bogenlänge zwischen zwei konkreten Punkten sollte anschließend spätestens mit dem Hinweis auf den Satz des Pythagoras gelingen, sodass die Lerngruppe letztlich auf die Formel zur Annäherung der vollständigen Bogenlänge eines Kurvenstücks durch

$$L_n \approx \sqrt{[f(x_1) - f(x_0)]^2 + (x_1 - x_0)^2} + \sqrt{[f(x_2) - f(x_1)]^2 + (x_2 - x_1)^2} + \dots + \sqrt{[f(x_n) - f(x_{n-1})]^2 + (x_n - x_{n-1})^2},$$

wobei x_0, x_1, \dots, x_n die Stellen und $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ die Funktionswerte der gegebenen Punkte darstellen, gelangt.

Die Herleitung der genauen Bogenlängenformel $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ mittels des Integrals beinhaltet zwar kein sehr hohes mathematisches Vorwissen, dürfte aber auch von einer starken Lerngruppe selbst mit Hilfestellungen im Regelfall kaum selbständig geleistet werden. Viel mehr bietet sich die Situation dazu an, die Herleitung bereitzustellen und anhand dieser allgemein auf Beweisvorgänge sowie Beweisideen einzugehen. Insbesondere durch die Vorkenntnisse über Ableitung, definiert als Tangentensteigung bzw. Grenzwert der momentanen Änderungsrate, sollte die Nachvollziehbarkeit der Beweisführung gegeben sein. Die Festigung rechnerischer Fähigkeiten legt auch hier schließlich weitere Übungsaufgaben zur Bestimmung von unterschiedlichen Bogenlängen nahe.

Rotation um die y-Achse

Aus dem Regelunterricht ist den Schülerinnen und Schülern lediglich die Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers um die x-Achse bekannt. In Verbindung mit den Vorkenntnissen über die Bildung einer Umkehrfunktion lässt sich hier jedoch schnell die Verknüpfung zwischen beiden Rotationskörperberechnungen erstellen:

Zur Einführung könnte man beispielsweise berechnen, welches Volumen Eis in einen Eisbecher mit vorgegebenen Maßen hineinpasst, da sich derartige Formen grundsätzlich als Rotationskörper anbieten.

Zuerst wird mittels einer kleinen Wiederholungsaufgabe zur Bestimmung einer Funktionsgleichung die grundsätzliche Form des Eisbechers als Schaubild mittels einer Parabel dargestellt. Wichtig ist nun an dieser Stelle, die Lerngruppe auf den Zusammenhang zwischen Rotation um die x-Achse und dieser Rotationsart zu bringen: Durch Spiegelung der Parabelhälfte an der ersten Winkelhalbierenden und somit rechnerisch durch Bildung der Umkehrfunktion erhält man zunächst einen dem ersten Typ von Rotationskörpern entsprechenden Fall. Im folgenden Gedankenschritt sollte den Schülerinnen und Schülern zusätzlich bewusst gemacht werden, dass auch die Intervallgrenzen durch die x-Achse nicht einfach übernommen werden können, sondern auch diese durch Einsetzung in die angegebene Funktion angepasst werden müssen. Als Ergebnis lässt sich nicht nur das gesuchte Volumen des Eisbechers festhalten, sondern gleichzeitig eine Anleitung zur Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers um die y-Achse, die an dieser Stelle idealerweise nochmals Schritt für Schritt für ein tieferes Verständnis wiederholt werden kann.